Entfernung und Beamrichtung berechnen (lang)

Tja so geht das. Da muß man schnell mal die überbrückte Entfernungen zwischen zwei Punkten auf der Erde berechnen und findet nur die beiden Locator-Daten, jedoch keine Entfernungsberechnung. Abhilfe schaffte Andreas, DJ3EI, auf der DL-QRP-AG-Mailingliste. Seine Mail bildet den Inhalt dieses Textes. TNX.

Hört sich so an, als wenn du sowieso geografische Koordinaten hattest. Also Breite und Länge B1, L1 des einen bzw. B2, L2 des anderen Punktes. Das hätte dann auch schon gereicht, ein Taschenrechner oder ähnliches genügt völlig, das geht auch ohne Software aus dem Internet.

Wenn du nämlich nicht nur an Selbstbau, sondern auch an Selbstrechnen interessiert bist. Sonst hör' lieber jetzt sofort auf, hier weiterzulesen. :-)

Die Formel, die man dazu braucht, hat den etwas abschreckenden Namen "Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie". Sie sieht auch, hier schon gleich in der passenden Variante, tatsächlich etwas abschreckend aus:

Entfernung

```
= R * arccos(sin B1 * sin B2 + cos B1 * cos B2 * cos(L1-L2))
```

Aber ganz so schlimm ist es auch wieder nicht. Hier die nötigen Erklärungen, gleich kommt dann ein konkretes Beispiel, dann ein paar Genauigkeitsbetrachtungen zum Ausruhen und zum Schluss noch eine andere Formel, die man zum Ausrichten von Antennen benutzen kann.

- Zunächstmal ist R der Erdradius. Eine ziemlich genaue Zahl für den ist 6371 km.
- B1 und B2 sind die Breiten der beiden Orte. Für B1 bzw. B2 ist eine negative Zahl zu nehmen, wenn der betreffende Ort auf der Südhalbkugel der Erde ist, eine positive, wenn er auf der Nordhalbkugel liegt.
- Entsprechend bei den Längen L1 bzw. L2: L1 bzw. L2 ist negativ, wenn der Ort westlich des Nulllängenkreises ist, die geografische Länge also "westlich" ist, sonst positiv.
- Bei der Berechnung der sin und cos-Funktionen sollte der Taschenrechner in Gradmaß gestellt sein. Diese Einstellung heißt häufig "DEG". Das man sie erwischt hat, erkennt man daran, dass bei cos(60) die glatte Zahl 0.5 herauskommt.
- Vor der Berechnung des arccos sollte dagegen auf Bogenmaß umgestellt werden. Das erkennt man daran, dass arccos(0.5) die Zahl 1.0472 ergibt. (Hier wie auch im Folgenden runde ich Zwischenergebnisse auf 5 Stellen.) Diese Zahl ist übrigens gleich PI / 3.

Das war's, damit kann man dann loslegen.

Ein relativ kompliziertes Rechenbeispiel praktisch durchgeführt:

Sydney hat 33° 52' südliche Breite, 151° 12' östlicher Länge,
Yokohama 35° 27' nördliche Breite, 139° 39' westlicher Länge.

(Das Beispiel ist deshalb relativ kompliziert, weil der eine Ort südlich, der andere nördlich des Äquators liegt und außerdem die kürseste Verbindung über den ±180° Meridian führt. Wer das richtig rauskriegt, kann auch alles andere Rechnen.) Wenn der Taschenrechner keine direkte Eingabe von ° und 'kann, muss man die ' durch 60 teilen:

```
Sydney:   B1 =  -(33 + 52/60) =  -33.867
          L1 =   151 + 12/60  =  151.20

Yokohama: B2 =    35 + 27/60  =   35.450
          L2 = -(139 + 39/60) = -139.65
```

Also

```
sin B1 * sin B2 = -0.55727 * 0.57999 = -0.32321

cos B1 * cos B2 =  0.83033 * 0.81462 =  0.67640

cos (L1 - L2)   = cos(151.20 - (-139.65))
                = cos(290.85)
                = 0.35592

cos B1 * cos B2 * cos (L1 - L2) = 0.67640 * 0.35592
                                = 0.24074
```

Jetzt den Taschenrechner umschalten auf Bogenmaß (RAD):

```
Entfernungswinkel = arccos(-0.32321 + 0.24074)
                  = arccos(-0.08247)
                  = 1.6534
                    (in Gradmaß wären das 94°44').

Entfernung = R * Entfernungswinkel
           = R * 1.6534
           = 6371 km * 1.6534
           = 10534 km
```

Fertig.

Nun einige Betrachtungen zur Genauigkeit des Verfahrens.

Die Erde ist nur angenähert eine Kugel. Daher ist auch dieses Verfahren nur angenähert genau, da es von einer idealen Kugelform ausgeht. Die größte Ungenauigkeit ergibt sich, wenn man den Abstand zweier genau gegenüberliegender Punkte des Äquators berechnet. Das Verfahren kommt in diesem Fall auf 20015km. Ein besserer Wert wäre 20038km, laut internationalem Erdellipsoid von 1924. Die Daten des neueren, der GPS-Navigation zugrundeliegenden Ellipsoids habe ich gerade nicht greifbar, sie dürften aber ähnlich sein. Relativ gesprochen, liegt der Fehler des Verfahrens im schlechtesten Fall kurz über einem Promille. Wer es so lieber amateurfunkmäßig ausdrücken will: Das entspricht einem Signal/Rauschabstand von 29 dB :-).

Zurückgerechnet auf unser konkretes Beispiel ergibt sich, dass die Ungenauigkeit im Fall Sydney/Yokohoma weniger als 12 Kilometern beträgt. Die Eingangsdaten würden übrigens eine größere Genauigkeit hergeben. Wir haben Grad (°) und Minuten ('), können also eine Genauigkeit von einer halben Minute voraussetzen. Das entspricht einer Genauigkeit von besser als einem Kilometer. (Wobei man also schon fragen muss, auf welche Stelle innerhalb von Sydney bzw. Yokohoma sich die Koordinaten eigentlich beziehen.) Eine ganze Minute Unterschied in der Breite verschiebt den Ort um eine Seemeile = 1.8km nach Norden oder Süden, eine Minute Unterschied in der Länge um 1.8km * cos(Breite), also weniger als eine Seemeile, nach Westen oder Osten.

Und im Computer?

Wer die Rechnung nicht mit einem Taschenrechner, sondern mit einer Tabellenkalkulation oder einer Programmiersprache nachvollziehen will, kommt vielleicht ins Schwitzen, wie er Gradmaß einstellen soll. Computer rechnen typischerweise mit Bogenmaß. In dem Fall hilft, vor dem Ausrechnen von sin oder cos das Argument durch 180/PI zu teilen, also durch 57.29577951.
Beispiel: Statt cos(60°) rechnet man, in Bogenmaß, cos(60/57.29577951) - und kriegt wieder 0.5 raus.

Beamrichtung

Wem das alles noch nicht reicht, dem hier noch eine Formel. Damit läßt sich die Frage beantworten: "Wie muss ich in Sydney meine Antenne ausrichten, um nach Yokohama zu funken?" Das ist derselbe "Cosinussatz der sphärischen Trigonometrie", diesmal in folgender Version:

Nordabweichung1

```
           sin B2 - sin B1 * cos Entfernungswinkel
= arccos ( --------------------------------------- )
                cos B1 * sin Entfernungswinkel
```

Dabei muss man sich mit ein Blick auf die Längen der beiden Orte selbst klarmachen, ob die Nordabweichung im Uhrzeigersinn oder im Gegenuhrzeigersinn läuft, die Formel gibt den Drehsinn nicht her. Im Fall Sydney kommt heraus:

```
           0.57999 - (-0.55727) * (-0.08247)
= arccos( ----------------------------------- )
                  0.83033 * 0.99659

= arccos(0.64536)

= 49° 48'
```

Von Sydney aus liegt der ±180° Meridian im Osten, und Yokohoma noch weiter im Osten (und außerdem im Norden). Also muss man die Antenne 49°18' nach Osten, also im Uhrzeigersinn aus der Nordrichtung drehen (und nicht im Gegenuhrzeigersinn). Sie landet dann also 4°18' südlicher als Nordosten, denn Nordosten entspricht genau 45°.

Tschüss!

Andreas, DJ3EI